JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 35, 467–483 (1971)

Sur quelques équations intégrales non linéaires

Y. CHERRUAULT

(Université de Paris VI)

Submitted by Richard Bellman

On se propose d'étudier, dans cet article, des intégrales du type $u + Pfg(x) * u^p = f$ où p est un nombre réel différent de 1 et généralement entier. Nous donnerons des théorèmes d'existence et d'unicité ainsi que des méthodes de résolution numérique.

1. GÉNÉRALITÉS

Soit à résoudre l'équation.

$$u + \int_0^1 (x - t)\, u^3(t)\, dt = f(x) \tag{1}$$

dans laquelle f est une fonction donnée de $\mathscr{C}^1(\Omega)$ ($\Omega = [0, 1]$). On cherche u réelle appartenant à $\mathscr{C}^1(\Omega)$. On supposera $\mathscr{C}^1$ muni de la norme: $\| u \|_{\mathscr{C}^1} = \sup(\| u \|_{\mathscr{C}}, \| u' \|_{\mathscr{C}})$: $\mathscr{C}^1$ est un espace complet pour cette norme. On sait, d'autre part, qu'un ensemble fermé et borné de $\mathscr{C}^1$ est un compact de $\mathscr{C}$, autrement dit l'injection de $\mathscr{C}^1(\Omega)$ dans $\mathscr{C}(\Omega)$ est compacte. Nous aurons à utiliser tout au long de ce travail le théorème suivant

THÉORÈME A (cf. [3]). *Soit X un espace vectoriel topologique. Si A est une application continue de X dans lui-même et si A applique un convexe compact K dans lui-même, alors A possède un point fixe dans K (i.e. il existe au moins un $u \in K$ tel que $Au = u$).*

2. THÉORÈME D'EXISTENCE

ρ désignant un nombre réel positif on a le

THÉORÈME 2.1. *Si ρ et $\| f \|_{\mathscr{C}^1}$ vérifient la relation*

$$\| f \|_{\mathscr{C}^1} + \rho^3 \leqslant \rho \tag{2}$$

alors l'équation (1) *admet au moins une solution $u \in \mathscr{C}^1$.*

409/35/3-1

Démonstration. L'équation (1) s'écrit encore sous la forme

$$u + x * \tilde{u}^3 = f \tag{3}$$

où $\tilde{u}(x)$ désigne la fonction égale à $u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\tilde{u}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$. On a donc $u = -x * \tilde{u}^3 + f$. Posons:

$$G(u) = x * \tilde{u}^3 - f; \tag{4}$$

nous allons montrer que $G(u)$ transforme le borné $\| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ en lui-même (pour ρ et $\| f \|_{\mathscr{C}^1}$ "pas trop grands").

En effet,

$$\| G(u) \|_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} = \sup \left| \int_0^1 (x - t)\, u^3(t)\, dt - f \right| \leqslant \| x * \tilde{u}^3 \|_{\mathscr{C}} + \| f \|_{\mathscr{C}}$$

$$\leqslant \int_0^1 | u^3(t) |\, dt + \| f \| \leqslant \| u \|_{\mathscr{C}}^3 + \| f \|_{\mathscr{C}}$$

Or $G_x'(u) = 1 * \tilde{u}^3 - f'(x)$, en conséquence

$$\| G'(u) \|_{\mathscr{C}} \leqslant \| f'(x) \|_{\mathscr{C}} + \| 1 * \tilde{u}^3 \|_{\mathscr{C}} \leqslant \| f' \|_{\mathscr{C}} + \| u \|_{\mathscr{C}}^3$$

D'où l'on tire:

$$\| G(u) \|_{\mathscr{C}^1(\Omega)} \leqslant \| f \|_{\mathscr{C}^1} + \| u \|_{\mathscr{C}^1}^3 \tag{5}$$

car $\| u \|_{\mathscr{C}} \leqslant \| u \|_{\mathscr{C}^1}$ si ρ et $\| f \|_{\mathscr{C}^1}$ sont tels que $\| f \|_{\mathscr{C}^1} + \| u \|_{\mathscr{C}^1}^3 \leqslant \| f \|_{\mathscr{C}^1} + \rho^3 \leqslant \rho$.

Alors $\| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ implique $\| Gu \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ et alors l'équation $u = -G(u)$ admet au moins un point fixe. En effet $\| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ est un compact de $\mathscr{C}(\Omega)$; or $G(u)$ transforme ce compact convexe en lui-même d'où l'existence d'au moins un point fixe de $G(u)$ dans $\| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$. Notons que l'on doit avoir $\| f \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho - \rho^3$ d'où la relation $\rho - \rho^3 \geqslant 0$ soit $\rho \leqslant 1$. Il en résulte que le $\| f \|_{\mathscr{C}^1}$ maximum est atteint pour $\rho = 1/\sqrt{3}$ et il vaut $1/2\sqrt{3}$.

3. Unicité de la solution

Nous aurons besoin du

Lemme 3.1. *Si* $Lu = \int_0^1 (x - t)\, u(t)\, dt$ *alors* $(Lu, u)_{L^2(\Omega)} = 0$; $(\ ,\ )$ *désignant le produit scalaire dans* $L^2(\Omega)$.

Preuve. On a $(Lu, u)_{L^2(\Omega)} = (x * \tilde{u}, \tilde{u})_{L^2(R)}$. Désignons par $\hat{f}$ la transformée de Fourier de la fonction ou de la distribution f, il vient

$$(Lu, u)_{L^2(\Omega)} = \left(-\frac{1}{2\pi i} \delta_\xi' \cdot \hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi) \right)_{L^2(R)} = -\frac{1}{2\pi i} \langle \delta_\xi', | \hat{u} |^2 \rangle$$

D'où $\mathrm{Re}(Lu, u)_{L^2(\Omega)} = 0$ ce qui implique $(Lu, u) = 0$ car u est réelle.

Remarque 3.1. Le résultat est valable si l'on prend

$$Lu = \int_0^1 (x-t)^{2p+1} u(t)\, dt$$

avec p entier $\geqslant 1$ car la transformée de Fourier de x^{2p+1} fait apparaître une partie imaginaire pure.

On peut maintenant montrer le

THÉORÈME 3.1. *L'équation* (1) *admet une solution* unique.

Preuve. Soient u_1 et u_2 deux solutions on a

$$(u_i, v)_{L^2(\Omega)} + (x * u_i^3, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{quel que soit} \quad v \in L^2(\Omega)$$
$$i = 1, 2$$

Par différence, il vient

$$(u_1 - u_2, v) = -(x * (u_1^3 - u_2^3), v)$$

Prenons $v = u_1^3 - u_2^3$ ce qui est possible car $u_i \in \mathscr{C}(\Omega)$ et donc $u_i^3 \in L^2(\Omega)$

$$(u_1 - u_2, u_1^3 - u_2^3)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{soit} \quad \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2)\, dx = 0$$

Comme $u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2$ est toujours $\geqslant 0$ (nul si $u_1 = u_2 = 0$) on a: $u_1 = u_2$ presque partout. Mais u_1 et u_2 sont continues d'où $u_1 = u_2$ partout.

4. EXEMPLE D'ÉQUATION RÉSOLUBLE PARTOUT

Soit l'équation non linéaire

$$u(x) + \int_0^1 (x-t)\, u^{1/3}(t)\, dt = f(x) \tag{6}$$

où $f(t)$ est donnée dans $\mathscr{C}^1(0, 1)$.

On cherche $u \in \mathscr{C}^1(0, 1)$. On a le résultat suivant

THÉORÈME 4.1. *Pour toute f donnée dans $\mathscr{C}^1(\Omega)$, il existe une solution et une seule de l'équation* (6). *Cette solution appartient à $\mathscr{C}^1(\Omega)$.*

Démonstration. On procède comme au Théorème 2.1 ce qui donne

$$\| G(u)\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \| f \|_{\mathscr{C}^1} + \| u \|_{\mathscr{C}^1}^{1/3}$$

avec

$$G(u) = -\int_0^1 (x-t)\, u^{1/3}(t)\, dt + f(t)$$

Par conséquent, $\| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ entraîne $\| G(u)\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \| f \|_{\mathscr{C}^1} + \rho^{1/3}$.

f étant donnée dans $\mathscr{C}^1$, il suffit de choisir ρ assez grand ($\rho \geqslant \|f\|_{\mathscr{C}^1} + \rho^{1/3}$) pour que l'on ait $\| G(u)\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$.

G transforme donc le compact convexe $\| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ en lui-même, d'où l'existence d'un point fixe de $G(u)$ dans ce compact. L'unicité se démontre comme suit. On pose $u^{1/3} = v$, (6) devient

$$v^3 + \int_0^1 (x - t)\, v(t)\, dt = f(x) \tag{7}$$

Si v_1 et v_2 sont deux solutions de (7) alors

$$(v_1{}^3 - v_2{}^3, w)_{L^2(\Omega)} = -(x * (v_1 - v_2), w)_{L^2(\Omega)}$$

Avec $w = v_1 - v_2$, on a, compte tenu du Lemme 3.1.

$$\int_0^1 (v_1{}^3 - v_2{}^3)(v_1 - v_2)\, dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (v_1 - v_2)^2\, (v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_1 v_2)\, dx$$

D'où $v_1 = v_2$ presque partout. Mais v_1 et v_2 sont continues et par conséquent $v_1 = v_2$ partout.

5. Conclusions

Il est évident que l'on peut se placer plus généralement dans le cadre suivant.

Soit l'équation

$$u + g(x) * \tilde{u}^\alpha = f(x) \qquad \text{avec} \quad \alpha \in R^+ \tag{8}$$

$g(x)$ fonction de classe C^1, $f(x)$ donnée dans $\mathscr{C}^1$. L'existence de solutions de (8) se démontrera à l'aide de majorants de $\| G(u)\|_{\mathscr{C}}$ et de $\| G'(u)\|_{\mathscr{C}}$ ($G(u) = -g(x) * \tilde{u}^\alpha + f(x)$). Ces majorants se trouvent facilement, en effet

$$\| G(u)\|_{\mathscr{C}} \leqslant \sup_{x\in[0,1]} | g(x)| \cdot \| u \|^\alpha_{\mathscr{C}(\Omega)} + \| f \|_{\mathscr{C}} \leqslant \| g \|_{\mathscr{C}} \cdot \| u \|^\alpha_{\mathscr{C}} + \| f \|_{\mathscr{C}}$$

$$\| G_x'(u)\|_{\mathscr{C}} \leqslant \sup_{x\in[0,1]} | g'(x)| \cdot \| u \|^\alpha_{\mathscr{C}(\Omega)} + \| f' \|_{\mathscr{C}} \leqslant \| g' \|_{\mathscr{C}} \cdot \| u \|^\alpha_{\mathscr{C}} + \| f' \|_{\mathscr{C}}$$

D'où

$$\| G(u)\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \| g \|_{\mathscr{C}^1} \cdot \| u \|^\alpha_{\mathscr{C}^1} + \| f \|_{\mathscr{C}^1}$$

L'unicité se démontrera comme ci-dessus pour $\alpha = 2p + 1$, ($p \in N$) ou pour $\alpha = 1/(2p + 1)$. Un problème ouvert est de voir si l'on a unicité pour $\alpha \in R^+$ quelconque. Donc

THÉORÈME 5.1. *L'équation* (8) *admet des solutions pour tout* $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ *si* $\alpha = 1/(2p+1) < 1$. *Dans le cas* $\alpha = 2p+1$, (8) *admet des solutions dans* $\|u\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho$ *pourvu que l'on ait*: $\|f\|_{\mathscr{C}^1} + \|g\|_{\mathscr{C}^1}$, $\rho^{2p+1} \leqslant \rho$ *ce qui implique, en particulier*, $\rho \leqslant 1/\|g\|^{1/2p}$.

Remarque 5.1. Soit

$$u = -\int_0^1 (x-t)\, u^3(t)\, dt + f \tag{9}$$

On sait que l'on a

$$\|x * \tilde{u}^3\|_{\mathscr{C}} \leqslant \|u^3\|_{\mathscr{C}} = \|u\|^3_{\mathscr{C}}$$

d'où

$$\|x * \tilde{u}^3 - f\|_{\mathscr{C}} \geqslant \|f\|_{\mathscr{C}} - \|x * \tilde{u}^3\|_{\mathscr{C}} \geqslant \|f\|_{\mathscr{C}} - \|u\|^3_{\mathscr{C}}$$

Si $\|u\| \leqslant \rho$ on a $\|x * \tilde{u}^3 - f\| \geqslant \|f\|_{\mathscr{C}} - \rho^3$ ce qui signifie

LEMME 5.1. *L'équation* (9) *n'admet pas de solution dans* $\|u\|_{\mathscr{C}} \leqslant \rho$ *si* $\|f\|_{\mathscr{C}} - \rho^3 > \rho$ *i.e. si* $\|f\|_{\mathscr{C}} > \rho + \rho^3$. *En effet, les ensembles* $\|u\|_{\mathscr{C}} \leqslant \rho$ *et* $\{G(u) = -x * \tilde{u}^3 - f / \|u\| \leqslant \rho\}$ *n'ont pas de point commun ce qui exclut pour* $G(u)$ *la possibilité d'avoir un point fixe dans* $\|u\|_{\mathscr{C}} \leqslant \rho$.

Remarque 5.2. Soit une équation de la forme

$$u + (Lu)^\alpha = f \qquad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2q+1} \text{ ou } \alpha = 2q+1 \qquad q \in N \tag{10}$$

$Lu = g(x) * \tilde{u}$ (L est linéaire). On peut se ramener à la forme (8). En effet, posons $f - u = v^\alpha$, on obtient $(Lu)^\alpha = (f-u) = v^\alpha \Leftrightarrow Lu = (f-u)^{1/\alpha}$ d'où v vérifie

$$Lf - Lv^\alpha = v. \tag{11}$$

Remarque 5.3. Soit l'équation

$$u + (Lu)^3 = f \tag{12}$$

avec L linéaire (ce qui suit s'appliquera en particulier au cas $Lu = g * \tilde{u}$). Supposons que L^{-1} existe et vérifie

$$\|L^{-1}u\|_{\mathscr{C}} \leqslant k\|u\|_{\mathscr{C}} \qquad \text{et} \qquad \|(L^{-1}u)'\|_{\mathscr{C}} \leqslant \alpha\|u\|_{\mathscr{C}^1} \tag{13}$$

et $\operatorname{Re}(Lu, u) = 0$. On en déduit:

LEMME 5.2. *L'équation* (12) *admet une solution unique pour tout* $f \in \mathscr{C}^1$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que (12) équivaut à

$$w = -L^{-1}(w^{1/3}) - f \qquad \text{en posant} \quad w = u - f \tag{14}$$

En reprenant la démonstration d'existence du §2 on en déduit que (14) admet une solution quelle que soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$. De plus, cette solution w est unique (§4). D'où il résulte que (12) admet une solution unique pour tout $f \in \mathscr{C}^1$.

6. Quelques cas particuliers

Il n'y a aucune difficulté à montrer l'existence des solutions d'équations du type

$$u + g(x) * u^{2p} = f, \qquad p \text{ entier} \geqslant 1$$

Les résultats qui précèdent s'appliquent, en effet, intégralement. Mais on ne peut plus prouver l'unicité en utilisant la méthode précédente, (cf. §5). En outre, une équation de la forme:

$$u - (Lu)^2 = f \tag{14}$$

ne peut plus se ramener à une équation du type $v + Lv^2 = f$ car l'application $v \to v^2$ n'est pas une bijection de R dans R.

On peut se proposer de chercher les solutions positives de (14). De façon précise soit $f \in \mathscr{C}^1, f \geqslant 0$, on peut se demander s'il existe des solutions $u \geqslant 0$ ($u \in \mathscr{C}^1$) de (14). Pour cela, considérons l'exemple

$$u - (x * \tilde{u})^2 = f \qquad f \in \mathscr{C}^1(0, 1), \qquad x * \tilde{u} = \int_0^1 (x - t)\, u(t)\, dt \tag{15}$$

On a $u = (x * \tilde{u})^2 + f$, posons $G(u) = (x * \tilde{u})^2 + f$. On a évidemment $G(u) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$. Il n'est pas difficile de montrer que, pour ρ convenable, G transforme l'ensemble $E = \{u \geqslant 0 / \| u \|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho\}$ en lui-même. Il suffit pour cela de majorer $| Gu |_{\mathscr{C}}$ et $\| G'u \|_{\mathscr{C}} = \| 2(x * \tilde{u}) \cdot (1 * \tilde{u}) \|_{\mathscr{C}}$. Puisque G transforme un convexe compact E de l'ensemble des fonctions continues $\geqslant 0$ dans lui-même, il existe au moins un u avec $G(u) = u$, $u \in E$. Mais, par contre, le problème de l'unicité (ou de la non unicité) de la solution reste ouvert car on ne peut pas utiliser de méthode analogue à celle utilisée au §3.

7. Une équation intégrale singulière et non linéaire

Nous nous proposons d'étudier l'équation:

$$u(x) + w(x) \cdot \mathrm{vp} \int_{-1}^{1} \frac{u^3(t)}{x - t}\, dt = f(x) \tag{7.1}$$

avec

$$w(x) = [(1+x)(1-x)]^{1/2+\alpha} \quad \text{si} \quad x \in [-1, +1], (0 < \alpha < \tfrac{1}{2})$$
$$w(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [-1, +1]$$

vp désigne la valeur principale de Cauchy [cf. 7]. Nous choisirons $f \in H_0^1(\Omega)$, $\Omega =]-1, 1[$ et nous allons voir qu'alors il existe une solution $u(x)$ de (7.1) appartenant à H_0^1. Pour cela nous utiliserons les résultats suivants.

LEMME 7.1. $w(x) \in H_0^1$.

Preuve. On a $w(\pm 1) = 0$ par définition. On a évidemment $w \in L^2(\Omega)$. Or $w'(x) = (\alpha + \frac{1}{2})\, 2x \cdot (1-x^2)^{\alpha-1/2}$. Au voisinage de $x = 1$, on a $w'(x) \sim 2(\alpha + \frac{1}{2})\, 2^{\alpha-1/2} \cdot (1-x)^{\alpha-1/2}$.

Mais

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1/2}\, dx = -\left(\frac{(1-x)^{\alpha+1/2}}{(\alpha+\frac{1}{2})}\right)_0^1 < +\infty,$$

donc w' est sommable au voisinage de $x = 1$; il en est de même au voisinage de $x = -1$. Donc $w' \in L^2(\Omega)$ et par suite $w \in H_0^1$. De là, on déduit le

LEMME 7.2. *Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u/w \in L^2(\Omega)$.*

Preuve. On sait (cf. [5]) que u vérifie

$$| u(x) - u(1) | \leqslant k \cdot | x - 1 |^{1/2}, \qquad k = \text{constante}$$

d'où $| u(x) | \leqslant k \,| x - 1 |^{1/2}$. Au voisinage de $x = 1$,

$$\left| \frac{u}{w} \right| \leqslant \frac{k}{c} \frac{| x-1 |^{1/2}}{| x-1 |^{1/2+\alpha}} = \frac{k}{c} | x - 1 |^{-\alpha}$$

d'où $| u/w |^2 \leqslant k^2/c^2 \,| x - 1 |^{-2\alpha}$ avec $0 < 2\alpha < 1$.

Donc $| u/w |^2$ est sommable au voisinage de $x = 1$. On démontrerait la même chose au voisinage de $x = -1$, par conséquent $u/w \in L^2(\Omega)$.

LEMME 7.3. *Si u et w sont respectivement dans H^1 et dans H_0^1 alors $u \cdot w \in H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. On a $u \cdot w \in L^2(\Omega)$. En effet $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ (cf. [4 et 5]). On a: $| u \cdot w |^2 \leqslant (\sup | w |)^2 \cdot | u |^2$ d'où le résultat. Supposons démontrée la formule $(u \cdot w)' = u' \cdot w + u \cdot w'$ (au sens des distributions), on peut en déduire $(u \cdot w)' \in L^2(\Omega)$. En effet, $| u'w |^2 \leqslant (\sup | w |)^2 \cdot | u' |^2$ et $| u \cdot w' |^2 \leqslant (\sup | u |)^2 \cdot | w' |^2$ ce qui implique $(u \cdot w)' \in L^2$. D'autre part, il est évident que l'on a $(u \cdot w)(\pm 1) = 0$ car w s'annule en ± 1 et u est continue dans $\bar{\Omega}$ (donc en particulier bornée dans $\bar{\Omega}$). Il reste à montrer la formule de dérivation. Pour cela, $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ étant dense dans $H^1(\Omega)$ (cf. [5]), il existe une suite $u_n \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$, avec $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$.

On a $(u_n w)' = u_n \cdot w' + u_n' \cdot w$ (au sens des distributions [6]; on a la dérivée du produit de la distribution w par la fonction $u_n \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$). Or

$$\langle u_n w', \phi \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle uw', \phi \rangle, \qquad (\phi \in \mathscr{D}(\bar{\Omega}))$$

En effet $\langle (u_n - u)w', \phi \rangle = \int (u_n - u)w'\phi \, dx$. Puisque $u_n \to u$ dans L^2 on a le résultat.

De même $u_n'w \to u'w$ au sens des distributions (car $u_n' \to u'$ dans L^2). De plus $\langle (u_n w)', \phi \rangle = \langle -u_n w, \phi' \rangle$ qui tend vers $\langle -uw, \phi' \rangle = \langle (uw)', \phi \rangle$ car $u_n \to u$ dans L^2.

Finalement $(u_n w)' - u_n w' - u_n' w$ tend vers $(uw)' - uw' - u'w$ au sens des distributions, on a donc $(uw)' = uw' + u'w$. Ces lemmes étant posés nous allons pouvoir passer à l'étude de l'

8. Existence et unicité de la solution

On a le

Théorème 8.1. *Si ρ et $\|f\|_{H_0^1}$ vérifient*

$$f \in H_0^1, \qquad \sqrt{20 + 6\sqrt{10}}\,\pi \cdot \|w\|_{H^1} \cdot \rho^3 + \|f\|_{H^1} \leqslant \rho, \tag{8.1}$$

alors l'équation

$$u(x) + w(x) \cdot \mathrm{vp} \int_{-1}^{1} \frac{u^3(t)}{x - t}\, dt = f(x) \tag{8.2}$$

admet une solution u ($\in H_0^1(\Omega)$) unique. Cette solution vérifie: $\|u\|_{H_0^1} \leqslant \rho$.

Preuve. (a) *Existence.*
Posons

$$F(u) = -w \cdot \mathrm{vp} \int_{-1}^{1} \frac{u^3(t)}{x - t}\, dt.$$

On a encore $F(u) = -w(x) \cdot (1/x * \tilde{u}^3)$. Montrons que si $u \in H_0^1$, $F(u) \in H_0^1$. Il est évident de vérifier $(Fu)(\pm 1) = 0$. De plus nous avons: $1/x * w \in L^2(R)$ (quel que soit $w \in L^2(R)$). Mais $(1/x * w)' = 1/x * w' \in L^2$ si $w \in H_0^1(\Omega)$. D'où il résulte: $F(u) \in H_0^1$.

En outre:

$$\|F(u)\|_{L^2(\Omega)} = \left\| w(x) \cdot \left(\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\|\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right\|_{L^2(\Omega)} \cdot \| w \|_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})}$$

$$\leqslant \| w \|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \left\|\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right\|_{L^2}$$

$\| 1/x * \tilde{u}^3 \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| 1/x * \tilde{u}^3 \|_{L^2(R)}$. A l'aide de la transformée de Fourier, cf. [7] et [2], il vient

$$\left(\frac{1}{x} * \tilde{u}, \frac{1}{x} * \tilde{u}\right)_{L^2(R)} = (-i\pi \operatorname{sgn} \xi \cdot \hat{\tilde{u}}, -i\pi \operatorname{sgn} \xi \cdot \hat{\tilde{u}})_{L^2(R)} = \pi^2 \| \hat{\tilde{u}} \|^2_{L^2(R)}$$

$$= \pi^2 \| \tilde{u} \|^2_{L^2(R)} = \pi^2 \| u \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Ce qui donne

$$\left\|\frac{1}{x} * \tilde{u}\right\|_{L^2(R)} \leqslant \pi \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

et en particulier

$$\left\|\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right\|_{L^2(R)} \leqslant \pi \| u^3 \|_{L^2(\Omega)}$$

Essayons maintenant de majorer $\| F'(u)\|_{L^2(\Omega)}$

$$F'(u) = -w'(x) \cdot \left(\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right) - w \cdot \left(-\frac{1}{x^2} * \tilde{u}^3\right)$$

d'après le Lemme 7.3.

Nous avons:

$$\| F'(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\| w' \cdot \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| w \cdot \left(-\frac{1}{x^2} * \tilde{u}^3\right)\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Mais

$$\left\| w' \cdot \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\|\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right\|_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} \cdot \| w' \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant \left\|\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right\|_{H^1(\Omega)} \cdot \| w' \|_{L^2(\Omega)} \tag{8.3}$$

car on sait que l'on a $L^2(\Omega) \supset \mathscr{C}(\bar{\Omega}) \supset H^1(\Omega)$ avec injection continue ce qui implique

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u \|_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} \leqslant \| u \|_{H^1(\Omega)} \tag{8.4}$$

De plus, $1/x * \tilde{u}^3 \in L^2(R)$ et $(1/x * \tilde{u}^3)' = (1/x * (\tilde{u}^3)') \in L^2(R)$ ce qui donne bien (8.3).

Majorons maintenant $\| 1/x * \tilde{u}^3 \|_{H^1(\Omega)}$. Pour cela remarquons les majorations

$$\left\|\left(\frac{1}{x} * \tilde{u}\right)'\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\|\left(\frac{1}{x} * \tilde{u}\right)'\right\|_{L^2(R)} = \left(\left(\frac{1}{x} * \tilde{u}', \frac{1}{x} * \tilde{u}'\right)_{L^2(R)}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant [(-i\pi \operatorname{sgn} \xi \cdot (2\pi i\xi)\hat{\tilde{u}}, -i\pi \operatorname{sgn} \xi (2\pi i\xi)\hat{\tilde{u}})]^{1/2} \text{ par transfourier}$$

$$\leqslant \pi \| 2\pi i\xi\hat{\tilde{u}} \|_{L^2(R)} = \pi \| \tilde{u}' \|_{L^2(R)} = \pi \| u' \|_{L^2(\Omega)}$$

De là, résultent les inégalités:

$$\left\| \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \left\| \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|_{H^1(R)} = \left(\left\| \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|_{L^2(R)} + \left\| \frac{1}{x} * (\tilde{u}^3)' \right\|_{L^2(R)}\right)^{1/2}$$

$$\left\| \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \pi^2 \| u^3 \|^2_{L^2(\Omega)} + \pi^2 \|(u^3)' \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Or $(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$, d'après la démonstration du Lemme 7.3, et si l'on tient compte de (8.4) il vient

$$(\| 3u^2u' \|_{L^2(\Omega)} \leqslant 3 \| u \|^2_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} \cdot \| u' \|_{L^2(\Omega)} \leqslant 3 \| u \|^3_{H^1(\Omega)}$$

$$\left\| \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant 10\pi^2 \| u \|^6_{H^1(\Omega)} \Leftrightarrow \left\| \frac{1}{x} * \tilde{u}^3 \right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{10}\, \pi \| u \|^3_{H^1(\Omega)} \quad (8.5)$$

(8.3) devient alors

$$\left\| w' \cdot \left(\frac{1}{x} * \tilde{u}^3\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| w' \|_{L^2(\Omega)} \cdot \sqrt{10} \cdot \pi \| u \|^3_{H^1(\Omega)}$$

$$\leqslant \sqrt{10} \cdot \pi \| w \|_{H^1(\Omega)} \cdot \| u \|^3_{H^1(\Omega)} \quad (8.6)$$

Considérons maintenant le terme $\| w \cdot (-1/x^2 * \tilde{u}^3) \|_{L^2(\Omega)}$, il se majore comme suit:

$$\left\| w \cdot \left(-\frac{1}{x^2} * \tilde{u}^3\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| w \|_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} \cdot \left\| \frac{1}{x^2} * \tilde{u}^3 \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant \| w \|_{H^1(\Omega)} \cdot \left\| \frac{1}{x^2} * \tilde{u}^3 \right\|_{L^2(R)} \leqslant 3\pi \| w \|_{H_0^1} \cdot \| u \|^3_{H^1(\Omega)}$$

D'où

$$\| F'(u) \|_{L^2} \leqslant (3 + \sqrt{10})\, \pi \| w \|_{H^1} \cdot \| u \|^3_{H^1(\Omega)} \quad (8.7)$$

En résumé, on obtient (compte tenu de 8.7)

$$\|F(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|F(u)\|_{H^1(R)} \leq \sqrt{20 + 6\sqrt{10}} \cdot \pi \cdot \|w\|_{H^1} \cdot \|u\|^3_{H^1(\Omega)} \quad (8.8)$$

Si l'on a $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho$ et si $\|f\|_{H^1}$ vérifie (8.1) on a

$$\|F(u) + f\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho$$

Mais $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho$ est un compact de $L^2(\Omega)$ (l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte) et l'application $G(u) = F(u) + f$ transforme ce compact en lui-même. L'application $G(u)$ possède donc un point fixe ce qui démontre l'existence.

(b) *Unicité de la solution.*

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (8.2). Par différence, on peut écrire

$$\left(\frac{u_1 - u_2}{w}, v\right)_{L^2(\Omega)} = -\left(\frac{1}{x} * (u_1^3 - u_2^3), v\right)_{L^2(\Omega)} \quad \text{et ce } \forall v \in L^2(\Omega)\ (*) \quad (8.9)$$

On sait (cf. [2]) que $(\mathrm{vp}(1/x) * u, u)_{L^2(\Omega)} = 0$. Si l'on fait $v = u_1^3 - u_2^3$ dans (8.9), on obtient:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(u_1 - u_2)}{w} \cdot (u_1^3 - u_2^3)\, dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{(u_1 - u_2)^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_1 \cdot u_2)}{w}\, dx \quad (8.10)$$

Or $u_1^2 + u_2^2 + u_1 \cdot u_2$ est toujours $\geqslant 0$ (nul si $u_1 = u_2 = 0$) de même $w(x) \geqslant 0$ ($=0$ si $x = \pm 1$) d'où $u_1 = u_2$ presque partout. Mais u_i est continue ($i = 1, 2$) d'où $u_1 = u_2$ partout.

Cela achève la démonstration du Théorème.

Remarque 8.1. Si l'on se place dans l'espace H_0^2, un raisonnement calqué sur ce qui précède permet de montrer que, pour tout $f \in H_0^2(\Omega)$ l'équation

$$u(x) + (1 - x^2) \cdot \mathrm{vp} \int_{-1}^{1} \frac{u^3(t)}{x - t}\, dt = f(x) \quad (8.11)$$

admet une solution et une seule $u \in H_0^2(\Omega)$ pourvu que $\|f\|_{H^2}$ ne soit pas "trop grand" (avec évidemment $f \in H_0^2(\Omega)$).

Remarque 8.2. La résolution d'équations du type

$$u(x) + w(x) \cdot \mathrm{vp} \int_{-1}^{1} \frac{u^{1/3}(t)}{x - t}\, dt = f(x) \quad (8.12)$$

(*) (8.9) a un sens grâce au Lemme 7.2.

n'a pas de sens dans H_0^1 car $u^{1/3}(t) \notin H^1$ même si $u \in H^1$. Un problème intéressant pourrait être de trouver des espaces où l'équation (8.12) admette une solution unique.

Il nous reste maintenant à aborder le problème de l'approximation numérique de tels problèmes.

9. Approximation à l'aide de problèmes d'optimisation

Reprenons un exemple-type de problème non linéaire et singulier (i.e. contenant une valeur principale) par exemple:

$$u(x) + w(x) \cdot \int_{-1}^{1} \frac{u^3(t)}{x-t}\, dt = f(x)\ (^1) \tag{9.1}$$

Nous associons à (9.1) le problème

$$\inf_{\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho} J(v) \qquad (v \in H_0^1) \tag{9.2}$$

avec

$$J(v) = \left\| v(x) + \int_{-1}^{1} \frac{v^3(t)}{x-t}\, dt - f(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{9.3}$$

L'existence et l'unicité de la solution de (9.1) implique le

Lemme 9.1. *Le problème* (9.2), (9.3) *admet une solution unique* $u(x)$, $[J(u) = \inf_{\|v\|_{H^1} \leq \rho} J(v)]$ *vérifiant* (9.1).

En effet, si u est la solution de (9.1) on a: $J(u) = 0$ ce qui implique que u est solution de (9.2), (9.3). Si u^* était une autre solution de (9.2), (9.3) on aurait: $J(u^*) = 0$ d'où

$$\left\| u^* + \int_{-1}^{1} \frac{u^{*3}(t)}{x-t}\, dt - f(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow u^* + \int_{+1}^{1} \frac{u^*(t)}{x-t}\, dt = f(x)$$

et donc $u^* = u$ grâce à l'unicité des solutions de (9.1).

Le problème se ramène donc à la résolution d'un problème d'optimisation avec contrainte. Numériquement, on considérera le problème d'optimisation discrétisé suivant:

$$\inf_{\|v\|_{H_0^1} \leq \rho} J_h(v) = \inf_{\|v\|_{H_0^1} \leq \rho} \left\| p_h r_h v + p_h r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h r_h v)^3}{x-t}\, dt - p_h r_h f \right\|_{L^2} \tag{9.4}$$

(1) Dans la suite nous omettrons $w(x)$ pour simplifier l'écriture. Voir remarque 9.2.

avec

r_h opérateur linéaire de restriction qui, à $v \in H_0^1$, fait correspondre la suite $r_h v = \{v(ph)\}_{p=-N}^{N}$, $(Nh = 1)$ (9.5)

p_h opérateur de prolongement qui, à la suite de $R^{2n+1} v_h = \{v_h(ph)\}_{p=-N}^{N}$, fait correspondre la fonction continue, linéaire par morceaux, passant par les points $(ph, v_h(ph))$. On montre facilement que l'on a:

$$\lim_{h \to 0} p_h r_h v = v \qquad \text{dans} \quad H_0^1. \qquad (v \in H_0^1) \tag{9.6}$$

LEMME 9.2. *Le problème* (9.4) *admet toujours au moins une solution* $u_h^* \in H_0^1$ [i.e. $\exists u_h^* / J_h(u_h^*) = \inf_{\|v\|_{H_0^1} \leqslant \rho} J_h(v)$].

Preuve. L'ensemble $\|v\|_{H_0^1} \leqslant \rho$, $v \in H_0^1(\Omega)$ est un ensemble compact de $L^2(\Omega)$. De plus, la fonctionnelle

$$J_h(v) = \left\| p_r r_h v + p_r r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h r_h v)^3}{x - t}\, dt - p_h r_h f \right\|$$

est continue sur $L^2(\Omega)$ puisque,

$$p_h\,,\ r_h\,,\ \mathrm{vp} \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x - t}\, dt$$

sont des fonctions continues. Donc $J_h(v)$ admet un minimum sur tout compact de $L^2(\Omega)$.

LEMME 9.3. *On a* $\| p_r r_h u_h^* \|_{H^1} \leqslant C$ *avec* C *indépendant de* h.

Preuve. C'est à peu près évident car $\| u_h^* \| \leqslant \rho$ (ρ indépendant de h), et $\| p_h r_h \| \leqslant M$ (cf. [1]) d'où $\| p_h r_h u_h^* \|_{H^1} \leqslant M\rho = C$. De là résulte le

THÉORÈME 9.1. u_h^* *converge vers* u *solution du problème* (9.1) *dans* $L^2(\Omega)$ fort.

Démonstration. D'après le Lemme précédent, on sait que la suite $p_h r_h u_h^*$ reste dans un compact de $L^2(\Omega)$ et dans un borné de H^1; on peut donc en extraire une sous suite, encore notée $p_h r_h u_h^*$, qui converge vers u^* dans $L^2(\Omega)$ *fort* et presque partout. Montrons que l'on a $u^* = u$. Pour cela remarquons l'inégalité.

$$\| u \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \rho \qquad \text{implique} \qquad \| u^3 \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{10}\, \rho^3. \tag{9.7}$$

En effet

$$\| u^3 \|_{L^2} \leqslant \| u^3 \|_{\mathscr{C}(\bar\Omega)} \leqslant \| u \|_{\mathscr{C}(\bar\Omega)}^3 \leqslant \| u \|_{H^1(\Omega)}^3 \leqslant \rho^3$$

En outre,

$$\|(u^3)'\|_{L^2(\Omega)} = \| 3u^2u' \|_{L^2(\Omega)} \leqslant 3 \| u \|^2_{\mathscr{C}(\bar{\Omega})} \cdot \| u' \|_{L^2} \leqslant 3 \| u \|^3_{H^1} \leqslant 3\rho^3$$

d'où

$$\| u^3 \|_{H_0{}^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{10}\, \rho^3$$

Cela entraîne l'inégalité

$$\|(p_h r_h u_h{}^*)^3 \|_{H^1} \leqslant \sqrt{10}\, C^3 \qquad \text{et} \qquad (p_h r_h u_h{}^*)^3$$

reste dans un borné de H^1 et donc un compact de $L^2(\Omega)$. Par suite, il existe une sous suite, encore notée $(p_h r_h u_h{}^*)^3$, qui converge vers w dans L^2 fort et presque partout. On a $w = (u^*)^3$. En effet, on sait que $(p_h r_h u_h{}^*)^3$ tend vers $(u^*)^3$ presque partout d'où $w = (u^*)^3$ d'après [6]. Finalement $(p_h r_h u_h{}^*)^3$ tend vers $(u^*)^3$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Comme vp $\int_{-1}^{1} u(t)/(x-t)\, dt$ est une application linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on obtient par passage à la limite dans

$$J_h(u_h{}^*) = \left\| p_h r_h u_h{}^* + p_h r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h r_h u_h{}^*)^3}{x-t}\, dt - p_h r_h f \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\lim_{h=0} J_h(u_h{}^*) = \left\| u^* + \int_{-1}^{1} \frac{(u^*)^3}{x-t}\, dt - f \right\|_{L^2(\Omega)}$$

car $(p_h r_h u_h{}^*)^3$ reste dans un compact de $L^2(\Omega)$; la fonction continue vp $\int_{-1}^{1} (p_h r_h u_h{}^*)^3/(x-t)\, dt$ transforme ce compact en un autre compact et l'on sait que l'application linéaire $p_h r_h$ converge vers l'identité uniformément sur tout compact. D'où

$$\lim_{h=0} p_h r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h r_h u_h{}^*)^3}{x-t}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{(u^*)^3}{x-t}\, dt$$

Il reste simplement à montrer que

$$\lim_{h=0} J_h(u_h{}^*) = 0$$

En effet, si $h \to 0$ on aura $p_h r_h u \to u$ dans H^1 et $\| p_h r_h u \|_{H^1} \leqslant \rho$ (u solution de 9.1). D'où $0 \leqslant J_h(u_h{}^*) \leqslant J_h(p_h r_h u)$.

Comme précédemment on montrerait que

$$\lim_{h=0} J_h(p_h r_h u) = \left\| u + \int_{-1}^{1} \frac{u^3(t)}{x-t}\, dt - f \right\|$$

d'où

$$\lim_{h=0} J_h(u_h{}^*) = 0$$

On a donc

$$\left\| u^* + \int_{-1}^{1} \frac{u^{*3}}{x-t}\, dt - f \right\|_{L^2} = 0 \Leftrightarrow u = u^*$$

et par conséquent la suite $p_h r_h u_h^*$ (et non plus seulement une sous suite) converge vers u; ce qui achève la démonstration.

Remarque 9.1. Il est facile de constater que la résolution du problème (9.4) équivaut à celle de

$$\inf_{\|p_h v_h\| \leq \rho} J_h(v_h) \tag{9.8}$$

où

$$J_h(v_h) = \left\| p_h v_h + p_h r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h v_h)^3}{x-t}\, dt - p_h r_h f \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{9.9}$$

Il suffit pour cela de remarquer que r_h est une surjection de H_0^1 sur l'ensemble des suites (de R^{2n+1}) nulles en ± 1.

Remarque 9.2. La suppression de $w(x)$ n'est pas gênante pour les démonstrations qui précèdent. En effet (9.4) deviendrait

$$\inf_{\|v\|_{H_0^1} \leq \rho} J_h(v) = \inf_{\|v\|_{H_0^1} \leq \rho} \left\| p_h r_h v + (p_h r_h w) \cdot p_h r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h r_h v)^3}{x-t}\, dt - p_h r_h f \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{9.10}$$

et il suffit de remarquer que

$$\lim_{h=0} p_h r_h w = w \qquad \text{dans } H_0^1 \text{ fort}$$

ce qui implique

$$\lim_{h=0} (p_h r_h w) \cdot p_h r_h \int_{-1}^{1} \frac{(p_h r_h v)^3}{x-t}\, dt = w \cdot v \qquad \text{dans } L^2 \text{ fort.}$$

10. Un deuxième exemple d'approximation

Considérons maintenant un exemple d'équations du type

$$u + \int_0^1 (x-t)\, u^3(t)\, dt = f \tag{10.1}$$

On sait (§2, démonstration du Théorème 2.1) que l'opérateur

$$u \to \int_0^1 (x-t)\, u(t)\, dt$$

est un opérateur continu de $\mathscr{C}(0, 1)$ dans $\mathscr{C}^1(0, 1)$; c'est donc, en particulier, un opérateur continu de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$. Cette remarque servira dans la suite.

A (10.1) associons le problème d'optimisation

$$\inf_{\|v\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho} J(v), \qquad (v \in \mathscr{C}^1), \tag{10.2}$$

avec

$$J(v) = \left\| v + \int_0^1 (x - t)\, v^3(t)\, dt - f \right\|_{\mathscr{C}(0,1)} \tag{10.3}$$

Comme précédemment, (10.2) et (10.3) admet une solution unique $u \in \mathscr{C}^1$ qui vérifie l'équation (10.1).

Le problème discrétisé associé à (10.2), (10.3) s'écrit

$$\inf_{\|v\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho} J_h(v), \qquad (v \in \mathscr{C}^1) \tag{10.4}$$

où

$$J_h(v) = \left\| p_h r_h v + p_h r_h \int_0^1 (x - t)(p_h r_h v)^3\, dt - p_h r_h f \right\|_{\mathscr{C}} \tag{10.5}$$

r_h est le même que précédemment mais p_h doit être tel que $p_h r_h v \to v$ dans $\mathscr{C}^1$ *fort.*

Etant donnée une suite $v_h = \{v_h(ph)\}_{p=0}^{N}$, $(Nh = 1)$, on peut choisir comme p_h la fonction qui associe à la suite une spline fonction passant par les points $(p_h, v_h(ph))$. Si le degré de la spline est suffisant, on a une convergence dans $\mathscr{C}^1(0, 1)$ fort.

Les lemmes et théorème du paragraphe précédant sont vrais en remplaçant H_0^1 par $\mathscr{C}^1(0, 1)$ et $L^2(\Omega)$ par $\mathscr{C}(0, 1)$. En particulier, on a

THÉORÈME 10.1. *Si u_h^* est une solution de* (10.4), (10.5) *alors*

$$\lim_{h=0} p_h r_h u_h^* = u,$$

(*u solution de* (10.1)), *dans $\mathscr{C}$* fort.

Remarque 10.1. (10.4), (10.5) équivaut aussi à résoudre

$$\inf_{\|p_h v_h\|_{\mathscr{C}^1} \leqslant \rho} J_h(v_h) = \left\| p_h v_h + p_h r_h \int_0^1 (x - t)(p_h v_h)^3\, dt - p_h r_h f \right\|_{\mathscr{C}(0,1)} \tag{10.6}$$

Remarque 10.2. Pour résoudre (10.1), on peut se placer dans l'espace $H^1(0, 1)$. L'opérateur $G(u) = f - \int_0^1 (x - t)\, u^3(t)\, dt$ applique H^1 dans H^1 (si $f \in H^1$); on démontrerait facilement que pour ρ et f convenables, $G(u)$ transforme le borné $\| u \|_{H^1} \leqslant \rho$ en lui-même. D'où l'existence d'un point fixe de $G(u)$ dans le compact de $L^2(0, 1)$ défini par $\| u \|_{H^1} \leqslant \rho$ (G étant continue de L^2 dans L^2). L'unicité du point fixe se démontrerait comme précédemment.

11. PERSPECTIVES

Il serait intéressant de pouvoir conclure cette étude par des résultats d'essais numériques. Ceux-ci sont actuellement en cours et permettront de vérifier pratiquement l'existence et l'unicité de la solution ainsi que l'efficacité de la méthode numérique proposée.

En outre, ces résultats peuvent sans doute s'étendre à des équations intégro différentielles non linéaires (et stationnaires) ainsi qu'au cas de plusieurs variables; ce que nous nous proposons d'étudier maintenant. Un problème intéressant serait, aussi, d'étudier des équations d'évolution faisant intervenir les opérateurs intégraux de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. AUBIN, Thèse, Paris, 1966.
2. Y. CHERRUAULT, "Approximation d'Opérateurs Linéaires et Applications," Dunod, 1968.
3. KANTOROWICH ET AKILOV, "Functional Analysis in Normed Spaces," Pergamon Press, 1964.
4. J. L. LIONS, "Équations Différentielles Opérationnelles," Springer Verlag, 1961.
5. J. L. LIONS, "Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles," Les Presses de l'Université de Montréal, 1962.
6. J. L. LIONS, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires," Gauthier-Villars-Dunod, 1969.
7. L. SCHWARTZ, "Théorie des Distributions," tomes 1 et 2, Hermann, Paris, 1961.